

VEKTORFELDER UND VEKTORANALYSIS

Diese Aufgaben sollen helfen, mehr Routine im Umgang mit Vektorfeldern und den in der Feldtheorie typischen Differentialoperatoren zu bekommen.

[P6] *Differentialoperatoren*

Berechnen Sie für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x})$ bzw. für eine beliebige skalare Funktion $\phi(\vec{x})$ in Indexnotation

- (a) $\text{div rot } \vec{A}(\vec{x})$,
- (b) $\text{rot rot } \vec{A}(\vec{x})$,
- (c) $\text{div grad } \phi(\vec{x})$,
- (d) $\text{rot grad } \phi(\vec{x})$ und
- (e) $\text{grad div } \vec{A}(\vec{x})$.

[P7] *Poynting-Vektor*

Gegeben sei ein zylindrischer ohmscher Draht mit der Leitfähigkeit σ und mit dem Radius a . Durch eine an den Enden angelegte Spannung U ergebe sich ein homogenes elektrisches Feld im Innern des Drahtes.

- (a) Berechnen Sie den Poynting-Vektor.
- (b) Berechnen Sie $\text{div } \vec{S}$ und stellen Sie die Energiebilanz unter Berücksichtigung der ohmschen Verluste auf.

Diskutieren Sie nun den Fall zweier paralleler idealer Leiter vom Kraftwerk zum Verbraucher und zurück. Wie zeigt nun – im Gegensatz zum einfachen ohmschen Leiter – der Poynting-Vektor?

[P8] *Ebene Wellen*

Im Vakuum hängt das elektrische Feld $\vec{E}(x)$ einer allgemeinen ebenen, elektromagnetischen Welle folgendermaßen vom Argument $x = (t, \vec{x})$ ab:

$$\vec{E}(x) = \vec{e}(u(x)) \quad \text{mit} \quad u(x) = k \cdot x = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x},$$

wobei \vec{k} und ω Konstanten sind. Wir nehmen an, dass $\vec{e}(u)$ für ausreichend große u verschwindet.

- (a) Welche Bedingung müssen der Vektor \vec{E} und der Wellenvektor \vec{k} erfüllen, damit die Vakuum-Maxwellgleichung $\text{div } \vec{E} = 0$ erfüllt ist?
- (b) Welchen Wert hat das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(x) = \vec{b}(u(x))$, das ebenfalls für ausreichend große Argumente verschwindet und die Maxwellgleichungen $\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$ und $\text{div } \vec{B} = 0$ erfüllt?
- (c) Welchen Wert muss die Kreisfrequenz ω haben, damit die Vakuum-Maxwellgleichung $\text{rot } \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0$ gilt?
- (d) Zeigen Sie, dass \vec{k} , \vec{E} und \vec{B} paarweise orthogonal sind, und dass das elektrische und magnetische Feld überall und jederzeit gleich groß sind.